

迭代正则化电容层析成像图像重建算法

李鹏, 楚攀

(中国能源建设集团广东省电力设计研究院有限公司, 广州, 510663)

摘要: 图像重建算法对于电容层析成像(Electrical Capacitance Tomography, ECT)可视化测量方法的成功应用至关重要。文章提出了一个新的重建算法以改善 ECT 图像重建质量。新方法构建了一个新的目标函数, 将 ECT 图像重建问题转化为一个最优化问题; 基于分裂 Bregman 方法, 提出了一个新的迭代方法, 有效地求解该目标函数。仿真计算结果表明, 提出的新算法能够确保 ECT 图像重建的数值稳定性, 显著改善图像重建质量, 为 ECT 图像重建提供了一个有效方法。

关键词: 电容层析成像; 逆问题; 图像重建

中图分类号: TP391.41

文献标志码: A

文章编号: 2095-8676(2017)S1-0101-06

Iteration Regularization Reconstruction Method for Electrical-capacitance Tomography

LI Peng, CHU Pan

(China Energy Engineering Group Guangdong Electric Power Design Institute Co., Ltd., Guangzhou 510663, China)

Abstract: The image reconstruction method plays a crucial role in successful applications of the electrical capacitance tomography (ECT) visualization measurement method. In this paper, a new imaging method was proposed to improve the reconstruction quality. In the proposed imaging method, a new cost function was put forward to convert the image reconstruction problem with the focus on the ECT imaging into an optimization problem. A new iteration method that encapsulates the advantages of the split Bregman (SB) method was developed to effectively solve the cost function. Numerical experiment results indicate that the proposed imaging method can ensure the numerical stability of the ECT image reconstruction and significantly improve the reconstruction quality. The findings of the study provide an effective method for the image reconstruction task in the ECT imaging.

Key words: electrical capacitance tomography; inverse problem; image reconstruction

多相流广泛存在于各种工业过程中。为了解多相流过程中所涉及的物理与化学机制, 我们必须准确获得介质在空间中的分布。电容层析成像(Electrical Capacitance Tomography, ECT), 是具有广阔发展前景的非侵入式成像技术之一, 它具有快速, 安全且在工作时不干扰流场的特性。由于其种种优点, ECT 技术近年来已被用于气和油、水和油、气和固两相流动测量。

ECT 测量的可靠性取决于成像算法的性能。

ECT 图像重建问题的病态本质制约了重建图像精度的改善。目前, 流行的 ECT 图像重建方法包括标准 Tikhonov 正则法(Standard Tikhonov Regularization, STR)^[1]、OIOR 方法^[2], Landweber 迭代法^[3]、L1 正则化方法(L1 regularization, L1R)^[4]、全变差正则化方法(Total Variation, TV)^[5]、代数重建方法(ART)^[6]等。STR 方法和 OIOR 方法能实现在线重建, 但是, 重建质量相对较低。Landweber 迭代法是一个流行的迭代重建方法, 然而该方法在本质上属于最速下降方法, 收敛速度相对较慢。特别是该算法具有半收敛特性, 在实际的应用中难以确定迭代终止条件。TV 算法在图像处理领域获得了广泛应用, 然而, 该算法受制于阶梯效应, 其成像质量并不理想。L1R 方法强调了重建对象的

收稿日期: 2017-11-06

作者简介: 李鹏(1977), 男, 河南洛阳人, 工程师, 学士, 主要从事新能源发电与节能建筑方面的研究工作(e-mail) lipeng@gedi.com.cn。

稀疏性先验,但是在实际的应用中,其成像质量仍有待于进一步地提高。为了进一步地提高图像重建质量,改善 ECT 测量结果的可靠性,本文提出了一个新的目标函数模化 ECT 图像重建问题,并提出了一个新的数值方法以有效求解该目标函数。数值实验结果证明了新算法的可行性与有效性。

1 ECT 图像重建模型

ECT 图像的重建过程一共有两个重要组成部分:正问题及反问题。正问题:电容数据可以根据已知的介电常数分布求出。反问题:根据测量的电容数据重建被测对象的介电常数分布,该过程是一个病态问题。实际的图像重建中,ECT 图像重建问题常常被转化为如下的矩阵方程^[7-8]:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} + \mathbf{r} \quad (1)$$

式中: \mathbf{y} 为 $m \times 1$ 维的电容测量值; \mathbf{x} 为 $n \times 1$ 维的介电常数分布,是未知变量; \mathbf{A} 为 $m \times n$ 的矩阵,反映了物质介电常数分布变化可以影响电容的大小。

具体地说,ECT 反问题的求解过程就是在已知 \mathbf{A} 和 \mathbf{y} 的条件下,快速的求解方程(1)中的未知变量 \mathbf{x} 。鉴于方程(1)的病态本质,常规的数值方法难以确保令人满意的解。为了获得稳定和有价值的数值解,需要在求解该问题时引入额外的知识或对数值解附加一定的外部约束条件。

2 重建目标函数

Tikhonov 正则法是处理病态问题的一种有效方法^[1]。通过对解进行约束,该方法将方程(1)的求解转化为一个最优化问题,即:

$$\min \left\{ D(\mathbf{A}, \mathbf{y}) + \sum_{j=1}^l \alpha_j R_j(\mathbf{x}) \right\} \quad (2)$$

式中: $D(\mathbf{A}, \mathbf{y})$ 为解的精确性测度; $R_j(\mathbf{x})$ 为正则项; $\alpha_j > 0$ 是正则参数。

STR 方法采用平方和函数作为解的精确性测度和正则项,可具体为^[1]:

$$\min \{ \|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|^2 + \alpha \|\mathbf{x}\|^2 \} \quad (3)$$

STR 方法能够确保稳定的数值解。但是,STR 方法更加趋向于产生一个过于光滑的近似解,从而导致那些不光滑性的信息丢失,其特征反映在图像重建中就表现为图像中的部分细节信息的丢失,空间分辨率也不高。

为了克服 STR 方法的过渡光滑效应,学者们引

入了 TV 方法。在本质上,TV 方法求解如下的最优化问题^[5]:

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|^2 + \alpha_1 \|\mathbf{D}_x \mathbf{x}\|_1 + \alpha_2 \|\mathbf{D}_y \mathbf{x}\|_1 \right\} \quad (4)$$

式中: $\|\cdot\|_1$ 为 1 范数; \mathbf{D}_x 和 \mathbf{D}_y 分别为水平方向和竖直方向上的一阶差分矩阵。

TV 方法已在图像处理领域获得了大量应用。但是,对于 ECT 图像重建问题而言,TV 方法的阶梯效应导致了对于复杂问题的重建质量相对较差。

特别地,方程(3)和(4)中均采用平方和函数作为数据精确性测度。研究表明,平方和函数的估计结果对于测量数据中的粗差较为敏感。因此,为改善估计的稳健性,本研究采用组合 2 范数和 1 范数作为解的精确性测度,即:

$$D(\mathbf{A}, \mathbf{y}) = \delta \|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|^2 + (1 - \delta) \|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|_1 \quad (5)$$

式中: $0 \leq \delta \leq 1$ 。

特别地,为了克服 TV 正则化方法的阶梯效应,本研究提出了如下的正则项,即:

$$R(\mathbf{x}) = \alpha_1 \|\mathbf{D}_x \mathbf{x}\|_1 + \alpha_2 \|\mathbf{D}_y \mathbf{x}\|_1 + \alpha_3 \|\mathbf{Wx}\|_1 \quad (6)$$

最终,将方程(5)和(6)代入方程(2)中导致如下的目标函数:

$$\min \left\{ \delta \|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|^2 + (1 - \delta) \|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|_1 + \alpha_1 \|\mathbf{D}_x \mathbf{x}\|_1 + \alpha_2 \|\mathbf{D}_y \mathbf{x}\|_1 + \alpha_3 \|\mathbf{Wx}\|_1 \right\} \quad (7)$$

3 求解方法

方程(7)是一个无约束最优化问题,寻求一个有效的数值方法求解该问题对于实际的 ECT 测量至关重要。根据最优化理论,方程(7)能重写为如下的约束最优化问题:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \left\{ \delta \|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|^2 + (1 - \delta) \|\mathbf{d}_1\|_1 + \alpha_1 \|\mathbf{d}_2\|_1 + \alpha_2 \|\mathbf{d}_3\|_1 + \alpha_3 \|\mathbf{Wx}\|_1 \right\} \\ s. t. \mathbf{d}_1 = \mathbf{Ax} - \mathbf{y}, \mathbf{d}_2 = \mathbf{D}_x \mathbf{x}, \mathbf{d}_3 = \mathbf{D}_y \mathbf{x} \end{array} \right. \quad (8)$$

根据分裂 Bregman (Split Bregman, SB)^[9],式(8)能转化为如下的最优化问题:

$$\min_{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{x}} \left\{ \begin{array}{l} \delta \|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|^2 + (1 - \delta) \|\mathbf{d}_1\|_1 + \alpha_1 \|\mathbf{d}_2\|_1 + \alpha_2 \|\mathbf{d}_3\|_1 + \alpha_3 \|\mathbf{Wx}\|_1 + \\ \frac{\mu_1}{2} \|\mathbf{d}_1 - (\mathbf{Ax} - \mathbf{y}) - \mathbf{b}_1^k\|^2 + \\ \frac{\mu_2}{2} \|\mathbf{d}_2 - \mathbf{D}_x \mathbf{x} - \mathbf{b}_2^k\|^2 + \frac{\mu_3}{2} \|\mathbf{d}_3 - \mathbf{D}_y \mathbf{x} - \mathbf{b}_3^k\|^2 \end{array} \right. \quad (10)$$

变量 \mathbf{b}_j ($j = 1, 2, 3$) 根据如下的公式进行更新:

$$\mathbf{b}_1^{k+1} = \mathbf{b}_1^k - [\mathbf{d}_1^{k+1} - (\mathbf{A}\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{y})] \quad (11)$$

$$\mathbf{b}_2^{k+1} = \mathbf{b}_2^k - (\mathbf{d}_2^{k+1} - \mathbf{D}_x \mathbf{x}^{k+1}) \quad (12)$$

$$\mathbf{b}_3^{k+1} = \mathbf{b}_3^k - (\mathbf{d}_3^{k+1} - \mathbf{D}_y \mathbf{x}^{k+1}) \quad (13)$$

采用交替最优化方法可将式(10)解耦为如下更为简单的极小化问题:

$$\mathbf{d}_1^{k+1} = \min \left\{ (1 - \delta) \|\mathbf{d}_1\|_1 + \frac{\mu_1}{2} \|\mathbf{d}_1 - (\mathbf{A}\mathbf{x}^k - \mathbf{y}) - \mathbf{b}_1^k\|^2 \right\} \quad (14)$$

$$\mathbf{d}_2^{k+1} = \min \left\{ \alpha_1 \|\mathbf{d}_2\|_1 + \frac{\mu_2}{2} \|\mathbf{d}_2 - \mathbf{D}_x \mathbf{x}^k - \mathbf{b}_2^k\|^2 \right\} \quad (15)$$

$$\mathbf{d}_3^{k+1} = \min \left\{ \alpha_2 \|\mathbf{d}_3\|_1 + \frac{\mu_3}{2} \|\mathbf{d}_3 - \mathbf{D}_y \mathbf{x}^k - \mathbf{b}_3^k\|^2 \right\} \quad (16)$$

$$\mathbf{x}^{k+1} = \min \left\{ \begin{array}{l} \delta \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 + \alpha_3 \|\mathbf{W}\mathbf{x}\|_1 + \frac{\mu_1}{2} \|\mathbf{d}_1^{k+1} - (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \mathbf{b}_1^k\|^2 + \\ \frac{\mu_2}{2} \|\mathbf{d}_2^{k+1} - \mathbf{D}_x \mathbf{x} - \mathbf{b}_2^k\|^2 + \frac{\mu_3}{2} \|\mathbf{d}_3^{k+1} - \mathbf{D}_y \mathbf{x} - \mathbf{b}_3^k\|^2 \end{array} \right\} \quad (17)$$

式(14)的解可表达为:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_1^{k+1} &= \min \left\{ (1 - \delta) \|\mathbf{d}_1\|_1 + \frac{\mu_1}{2} \|\mathbf{d}_1 - (\mathbf{A}\mathbf{x}^k - \mathbf{y}) - \mathbf{b}_1^k\|^2 \right\} \\ &= \text{shrinkage}((\mathbf{A}\mathbf{x}^k - \mathbf{y}) + \mathbf{b}_1^k, (1 - \delta)/\mu_1) \end{aligned} \quad (18)$$

式中: $\text{shrinkage}(\cdot, T_h) = \text{sgn}(\cdot) \max\{|\cdot| - T_h, 0\}$ 代表软阈值算子; T_h 代表阈值; $\text{sgn}(\cdot)$ 代表符号函数, 即:

$$\text{sgn}(u) = \begin{cases} 1, & u > 0 \\ 0, & u = 0 \\ -1, & u < 0 \end{cases} \quad (19)$$

同理, 式(15)和(16)的解可表达为:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_2^{k+1} &= \min \left\{ \alpha_1 \|\mathbf{d}_2\|_1 + \frac{\mu_2}{2} \|\mathbf{d}_2 - \mathbf{D}_x \mathbf{x}^k - \mathbf{b}_2^k\|^2 \right\} \\ &= \text{shrinkage}(\mathbf{D}_x \mathbf{x}^k + \mathbf{b}_2^k, \alpha_1/\mu_2) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_3^{k+1} &= \min \left\{ \alpha_2 \|\mathbf{d}_3\|_1 + \frac{\mu_3}{2} \|\mathbf{d}_3 - \mathbf{D}_y \mathbf{x}^k - \mathbf{b}_3^k\|^2 \right\} \\ &= \text{shrinkage}(\mathbf{D}_y \mathbf{x}^k + \mathbf{b}_3^k, \alpha_2/\mu_3) \end{aligned} \quad (21)$$

此外, 式(17)能够采用 FIST 方法有效求

解^[10]。最终, 如表 1 所示, 一个新的、用于求解式(7)的方法被总结在算法 1 中。特别地, 我们称其为迭代正则化重建方法 (Iteration Regularization Reconstruction, IRR)。

表 1 算法 1—IRR 算法

Tab. 1 ALG1—IRR ALG

1. 初始化。
2. 当 $k=1, 2, \dots$, 执行如下的计算直至满足迭代终止条件
 - 步骤 1. 根据方程(18)更新变量 \mathbf{d}_1^{k+1} 。
 - 步骤 2. 根据方程(20)更新变量 \mathbf{d}_2^{k+1} 。
 - 步骤 3. 根据方程(21)更新变量 \mathbf{d}_3^{k+1} 。
 - 步骤 4. 用 FIST 方法求解方程(17)更新变量 \mathbf{x}^{k+1} 。
 - 步骤 5. 根据方程(11)更新变量 \mathbf{b}_1^{k+1} 。
 - 步骤 6. 根据方程(12)更新变量 \mathbf{b}_2^{k+1} 。
 - 步骤 7. 根据方程(13)更新变量 \mathbf{b}_3^{k+1} 。
3. 输出计算结果。

4 数值实验

为了验证这个算法的有效性, 采用数值模拟的途径对我们所提出算法 IRR 进行图像重建, 并同 STR 方法、OIOR 方法、ART 方法、Landweber 方法、TV 方法、L1R 方法的图像重建质量进行互相比较。针对 ECT 系统, 我们采用了 12 电极方形传感器; 图像显示采用 32 像素 \times 32 像素的像素分割; 所有的模拟计算在 Matlab 软件平台上进行。

采用图像误差定量评价图像重建的精度, 它可具体表达为:

$$\text{IE} = \frac{\|\mathbf{x}_O - \mathbf{x}_R\|}{\|\mathbf{x}_O\|} \times 100\% \quad (31)$$

式中: \mathbf{x}_O 和 \mathbf{x}_R 分别代表真实的图像和重建的图像。

图 1 是根据算法得到的重建对象, 颜色深的部分用来代表高介电常数, 设定为 2.6, 其它的部分用来代表低介电常数, 设定为 1.0。STR 方法的正则参数定义为 0.003。ART 方法与 Landweber 方法的算法参数如表 2 和表 3 所示。TV 方法和 L1R 方法中的正则参数分别为 0.008 和 0.01。在 IRR 方法中, $\delta=0.9$, $\alpha_1=\alpha_2=0.08$, $\alpha_3=0.007$, 迭代停止条件为 $(\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|/\|\mathbf{x}^k\|) \leq 10^{-4}$ 。图 2~图 8 分别是 STR 方法、OIOR 方法、ART、Landweber 方法、TV 方法、L1R 方法和 IRR 方法重建图像。图像误差如表 4 所示。

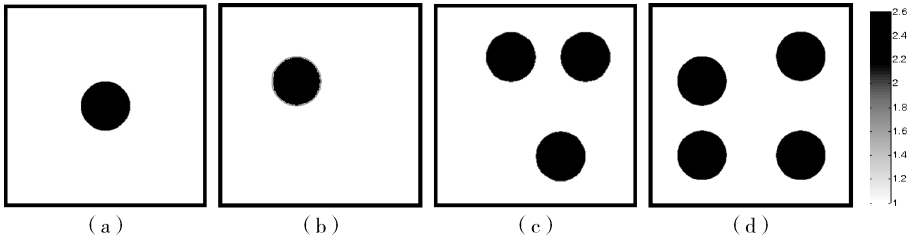


图 1 重建对象

Fig. 1 Reconstruction of the image

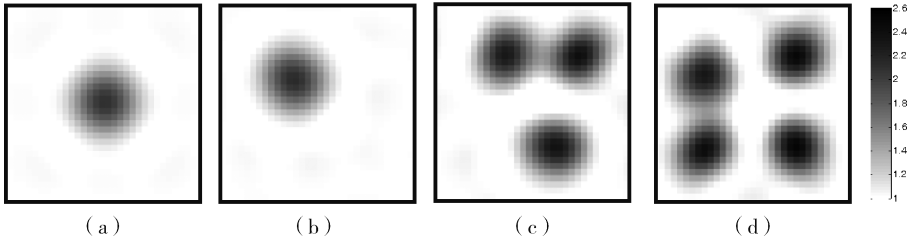


图 2 STR 算法重建图像

Fig. 2 Reconstruction of the image using STR method

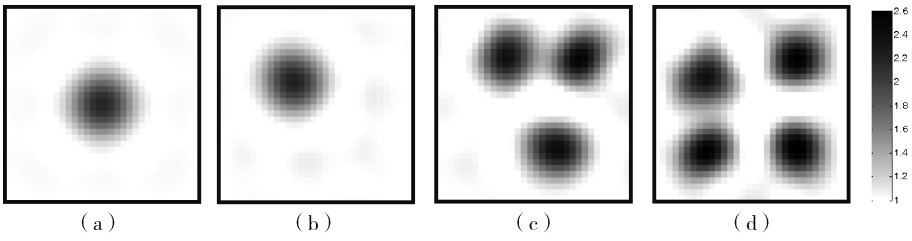


图 3 OIOR 算法重建图像

Fig. 3 Reconstruction of the image using OIOR method

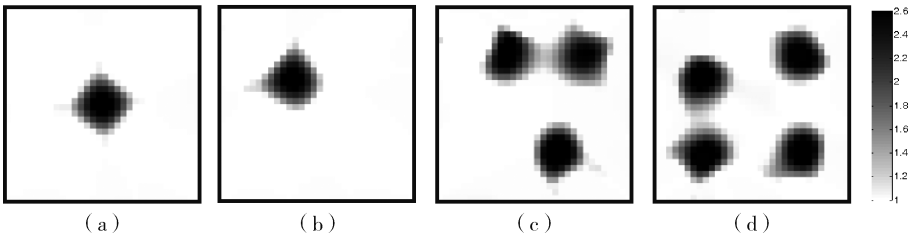


图 4 ART 算法重建图像

Fig. 4 Reconstruction of the image using ART method

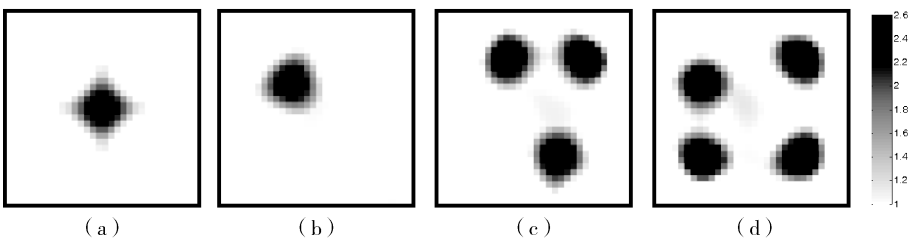


图 5 Landweber 算法重建图像

Fig. 5 Reconstruction of the image using Landweber method

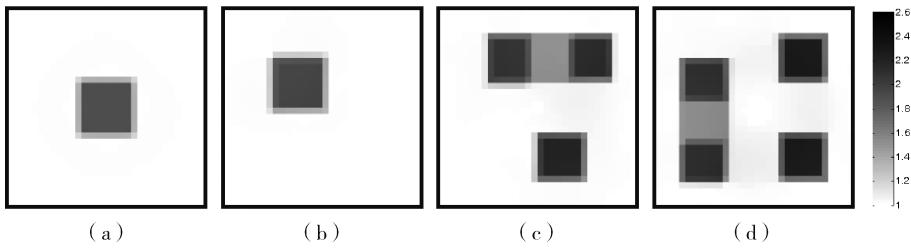


图 6 TV 算法重建图像

Fig. 6 Reconstruction of the image using TV method

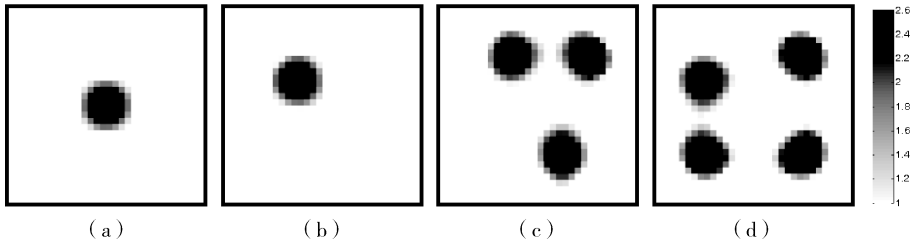


图 7 L1R 算法重建图像

Fig. 7 Reconstruction of the image using L1R method

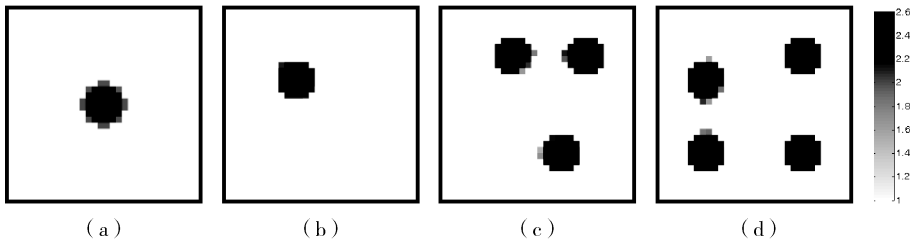


图 8 IRR 算法重建图像

Fig. 8 Reconstruction of the image using IRR method

表 2 ART 算法参数

Tab. 2 ART algorithm parameters

参数	图 1 (a)	图 1 (b)	图 1 (c)	图 1 (d)
松弛因子	1	1	1	1
迭代数目	2 877	1 203	410	400

表 3 Landweber 算法参数

Tab. 3 Landweber algorithm parameters

参数	图 1 (a)	图 1 (b)	图 1 (c)	图 1 (d)
松弛因子	1	1	1	1
迭代数目	1 933	596	486	432

表 4 图像误差

Tab. 4 Deviation for the image

算法	图 1 (a)	图 1 (b)	图 1 (c)	图 1 (d)	%
STR	17.11	16.97	24.16	25.85	25.85
OIOR	16.58	16.52	23.52	25.23	25.23
ART	12.50	12.26	18.54	20.13	20.13
PLI	12.12	12.62	17.64	18.82	18.82
TV	19.47	18.91	24.78	25.99	25.99
L1R	10.43	10.42	15.72	17.61	17.61
IRR	9.83	3.28	5.91	5.13	5.13

从图 2 ~ 图 8 中的比较可看出, STR 方法、OIOR 方法、ART 方法、Landweber 方法、TV 方法、L1R 方法导致了明显的重建伪像, 图像的失真和变形较为严重。然而, 正如所期望的, IRR 算法

重建图像的空间分辨率得到了明显改善。事实上, 从表 4 中的定量比较可发现, 在所有的算法中, IRR 算法的图像误差是最小的。对于本研究所仿真的重建对象(图 1 (a) ~ (d))、IRR 算法的重建图像的误差分别是 9.83%、3.28%、5.91% 和 5.13%。

重建精度说明,应用 IRR 算法进行图像重建是有效的。

5 结论

本文提出了一个新的目标函数,将 ECT 图像重建问题转化为一个最优化问题;并基于 SB 方法,提出了一个新的迭代方法有效求解该目标函数。数值实验结果表明,本研究所提出的算法是有效的,其成像质量优于 STR 方法、OIOR 方法、ART 方法、Landweber 方法、TV 方法、L1R 方法。而且该算法计算复杂性相对较低,从而为 ECT 图像重建提供了一种新的有效方法。

参考文献:

- [1] TIKHONOV A N, ARSEININ V Y. Solution of ill-posed problems [J]. *Mathematics of Computation*, 1977, 32 (144): 491-491.
- [2] LIU S, FU L, YANG W Q, et al. Prior-online iteration for image reconstruction with electrical capacitance tomography [J]. *IEE Proceedings-Science Measurement and Technology*, 2004, 151(3): 195-200.
- [3] LANDWEBER L. An iteration formula for fredholm integral equations of the first kind [J]. *American Journal of Mathematics*, 1951, 73(3): 615-624.
- [4] Dong X Y, YE Z Y, SOLEIMANI M. Image reconstruction for electrical capacitance tomography by using soft-thresholding iterative method with adaptive regulation parameter [J]. *Measurement Science and Technology*, 2013, 24(24): 1-8.
- [5] SOLEIMANI M, LIONHEART W R. Nonlinear image reconstruction for electrical capacitance tomography using experimental data [J]. *Measurement Science and Technology*, 2005, 16 (10): 1987-1996.
- [6] GORDON R, BENDER R, HERMAN G T. Algebraic reconstruction techniques(ART) for three-dimensional electron microscopy and X-ray photography [J]. *Journal of Theoretical Biology*, 1970, 29(3): 471-481.
- [7] XIA C, SU C, CAO J, et al. Reconstruction of electrical capacitance tomography images based on fast linearized alternating direction method of multipliers for two-phase flow system [J]. *Chinese Journal of Chemical Engineering*, 2016, 24 (5): 597-605.
- [8] LEI J, MU H P, LIU Q B, et al. Tensor-based dynamic reconstruction method for electrical capacitance tomography [J]. *Measurement Science and Technology*, 2017, 28: 1-12.
- [9] GOLDSTEIN T, OSHER S. The split bregman method for L1-regularized problems [J]. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 2009, 2(2): 323-343.
- [10] BECK A, TEOULLE M. A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems [J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2009, 2(1): 183-202.

(责任编辑 李辉)

(上接第 100 页 Continued from Page 100)

- [7] 阳凡林, 赵建虎, 张红梅, 等. RTK 高程和 Heave 信号的融合及精度分析 [M]. *武汉大学学报(信息科学版)*, 2007, 32(3): 226-228.
YANG F L, ZHAO J H, ZHANG H M, et al. Fusion and accuracy analysis of RTK elevation and heave signal [M]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2007, 32 (3): 226-228.
- [8] RESON B V. PDS 2000 User Manual V3.3 [M]. Netherlands: RESON, 2006.
- [9] 杜强, 陆秀平, 肖振坤, 等. 基于 StarFire 星站差分 GPS 系统的精密静态解研究 [J]. *海洋测绘*, 2011, 31(5): 5-7.
DU Q, LU X P, XIAO Z K, et al. Research on precision static solution of differential GPS system based on starfire [J]. *Hydrographic Surveying and Charting*, 2011, 31(5): 5-7.
- [10] 陈尚州, 王灵锋. RTK 无验潮测量与有验潮测量的比较 [J]. *浙江水利科技*, 2009(5): 44-46.
CHEN S Z, WANG L F. Comparison of RTK elevation and tide measurement [J]. *Zhejiang Hydrotechnics*, 2009 (5): 44-46.
- [11] 李凯锋, 田建波. 无验潮水深测量系统定位精度检验 [J]. *海洋测绘*, 2013, 33(6): 22-25.
LI K F, TIAN J B. Positioning accuracy test of non-tide depth measurement system [J]. *Hydrographic Surveying and Charting*, 2013, 33(6): 22-25.
- [12] 中华人民共和国建设部, 中华人民共和国国家质量监督检验检疫总局. 工程测量规范: GB 50026—2007 [S]. 北京: 中国标准出版社, 2007.
Ministry of Construction of the People's Republic of China, Code for engineering surveying: GB 50026—2007 [S]. Beijing: Standards Press of China, 2007.

(责任编辑 李辉)